Chapitre 10

Primitives, intégrales

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial.
De plus, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: dans chaque résultat, on peut ou bien remplacer tous les $\mathbb{K}$ par $\mathbb{R}$ ou bien remplacer tous les $\mathbb{K}$ par $\mathbb{C}$.

1 Primitives

Voici tout d'abord un théorème préliminaire :

Théorème 10.1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable. f est constante sur I si et seulement si $f' \equiv 0$ sur I.

Démonstration. On a vu la démonstration pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ au chapitre 8 (Généralités sur les fonctions). Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Le sens direct est évident. Montrons le sens réciproque : on suppose donc que f' est nulle. On rappelle que $f = \mathrm{Re} f + i \,\mathrm{Im} f$, donc pour tout $x \in I$, on a

$$f'(x) = (\mathrm{Re} f)'(x) + i\,(\mathrm{Im} f)'(x) = 0$$

d'où, en égalisant partie réelle et partie imaginaire, on en déduit que (pour tout $x \in I$), on a $(\mathrm{Re} f)'(x) = 0$ et $(\mathrm{Im} f)'(x) = 0$. Ainsi, $(\mathrm{Re} f)' \equiv 0$ et $(\mathrm{Im} f)' \equiv 0$. Comme $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, on en déduit (par la version $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ de ce théorème), que $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont constantes. Ainsi, $f = \mathrm{Re} f + i \,\mathrm{Im} f$ est également constante. □

Remarque. L'hypothèse "I est un intervalle" est essentielle. Si on définit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

alors on montre facilement que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $f' \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^*$. Pourtant, f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

1.1 Primitive sur un intervalle

Définition 10.2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On appelle primitive de f (sur I) toute fonction $F : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I telle que $F' = f$.

Attention, il n'y a pas unicité de la primitive de f :

Théorème 10.3

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et F une primitive quelconque de f sur I.

1. Toute fonction G est une primitive de f sur I si et seulement si $F - G$ est constante sur I.
2. En particulier, toutes les primitives de f sur I sont exactement les fonctions de la forme

$$x \mapsto F(x) + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{K}$$

Une telle constante C est souvent appelée constante d'intégration.

Démonstration. Il suffit de montrer l'équivalence de la première assertion.

- Sens direct : on suppose que G est une primitive de f sur I. Montrons que $F - G$ est constante sur I. La fonction $F - G$ est dérivable comme différence de fonctions dérivables et :

$$(F - G)' = F' - G' = f - f \equiv 0$$

  Alors, comme I est un **intervalle**, on en déduit que $F - G$ est constante.

- Sens réciproque : on suppose que $F - G$ est constante. Donc il existe $K \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in I$, $(F - G)(x) = K$. En particulier, on a $G(x) = F(x) - K$. Ainsi, la fonction G est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables, et
$$G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$$
La fonction G est donc bien une primitive de f sur I.

□

Exemple 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Toutes les primitives de $x \mapsto x^n$ sur $I = \mathbb{R}$ sont les fonctions
- Toutes les primitives de $x \mapsto x^{-1}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions
- Toutes les primitives de $x \mapsto x^{-1}$ sur $I = \mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions

1.2 Primitive sur une partie de $\mathbb{R}$ quelconque

Par extension, si D est une partie quelconque de $\mathbb{R}$ (par nécessairement un intervalle) et qu'on considère une fonction $f : D \to \mathbb{K}$, on appelle primitive de f (sur D) toute fonction $F : D \to \mathbb{K}$ dérivable telle que $F' = f$.

Si on cherche *toutes* les primitives de f sur un ensemble D qui n'est pas un intervalle, il faut rajouter une constante d'intégration a priori différente sur chaque intervalle compris dans D.

Exemple 2. Les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $D = \mathbb{R}^*$ sont les fonctions F de la forme

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{K}$$

2 Lien entre primitives et intégrale

2.1 Définition de l'intégrale

On donne ici une définition informelle d'intégrale, pour une fonction continue :

Définition 10.4

Soit $a, b \in I$ tels que $a < b$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note

$$\int_a^b f(x)dx$$

l'aire (avec un signe) que fait la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

On verra en section 4 une définition de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exemple 3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On a $\displaystyle\int_a^b 0dx = \dots\dots\dots$ et $\displaystyle\int_a^b 1dx = \dots\dots\dots$

Remarque. Toujours sous l'hypothèse $a < b$, on pose par convention :

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

On peut ainsi donner un sens à $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ pour tous réels a et b, en distinguant les cas $a < b$, $a = b$ et $a > b$.

Notation. La variable selon laquelle on intègre, ici x, est **une variable muette** :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(@)d@ = (\dots)$$

En particulier $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ **ne dépend pas de** x. Il existe ainsi une notation alternative :

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)dx$$

2.2 Le théorème fondamental de l'analyse

Le théorème qui suit est le résultat le plus important du chapitre (ultérieur) de théorie de l'intégration. C'est dans ce chapitre qu'on en fera la démonstration, ainsi que la construction précise de l'intégrale.

Théorème 10.5 – Théorème Fondamental de l'Analyse (TFA)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I, et $a \in I$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

est *l'unique* primitive de f qui s'annule en a.

La fonction F est donc l'unique fonction (dérivable) qui vérifie $F' = f$ et $F(a) = 0$.

Exemple 4. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$. En posant $a = 1$, on peut définir pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

La fonction ln est ainsi définie comme étant l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

2.3 Un premier corollaire du TFA

Le TFA permet de faire le lien entre les primitives et le calcul d'intégrale (i.e. l'aire sous la courbe). On peut en déduire de nombreuses conséquences !

Notation. Dans la suite, pour toute fonction F définie en a et b, on note

$$\big[F(t)\big]_a^b := F(b) - F(a) \qquad \text{ou encore} \qquad \big[F\big]_a^b := F(b) - F(a)$$

Corollaire 10.6

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I, et F une primitive *quelconque* de f sur I. Alors

$$\forall a,b \in I \qquad \int_a^b f(t)dt = \big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Preuve du corollaire.

□

Remarque. Le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \big[F(x)\big]_a^b$ ne dépend pas de la primitive F qu'on choisit : si G est une autre primitive de f, alors $\big[G(x)\big]_a^b = \big[F(x)\big]_a^b$, puisque G et F sont égales à constante près.

2.4 Remarques sur le TFA et son premier corollaire

Le TFA et le Corollaire 10.6 mettent en évidence le lien très fort entre primitives et intégrales :

- **(Intégrale / aire → Primitive)** Si pour tout $x \in I$, on sait calculer l'aire $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$, alors par le théorème fondamental, on connait une primitive F de f sur I. Ainsi, *toutes* les primitives de f sur I sont les fonctions

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt + C \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{K}$$

- **(Primitive → Intégrale / aire)** Si on connait une primitive de f sur I, le Corollaire 10.6 permet de calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Outre ces deux aspects, le théorème fondamental a aussi une utilité plus théorique :

Corollaire 10.7

Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.
En outre, pour tout $a \in I$, il y a une primitive et une seule qui s'annule en a.

2.5 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 10.8 – Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si f est dérivable (sur I) **ET** si sa dérivée f' est continue (sur I).

Une fonction dérivable n'est pas toujours de classe $\mathscr{C}^1$, comme le montre l'exemple suivant (démontré au TD 7–8).

Exemple 5. On pose $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Voici une réécriture du Corollaire 10.6 qui sert également en pratique :

Corollaire 10.9

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Alors

$$\forall a, b \in I \qquad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

Démonstration. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction f' est continue sur I. De plus f est clairement une primitive de f' sur I. On vérifie donc les hypothèses du Corollaire 10.6 pour la fonction f', ce qui donne le résultat. □

3 Calcul pratique d'intégrales

3.1 Reconnaitre une primitive

Si on connait une primitive de la fonction à intégrer, alors le corollaire 10.6 du TFA permet de conclure. *Dans les exercices, on peut appliquer directement la formule $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ sans rappeler l'hypothèse que f est continue.*

Remarque. Un formulaire sur les primitives usuelles est disponible sur le site, formulaire qu'il est crucial de connaitre pour trouver des primitives.

Exemple 6. Calculer $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$.

Exemple 7. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(kt)dt$.

Remarque. Si on connait (par exemple) la primitive de $\sqrt{x}$, alors on sait trouver les primitives de $\sqrt{ax+b}$ avec a et b deux réels. Il faudra donc, lorsque c'est possible, employer des réécritures pour essayer de se ramener à une telle situation, quitte à forcer l'apparition d'un $ax+b$.

Exemple 8. Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{x^2+2}dx$.

3.2 Propriétés de l'intégrale

On rappelle quelques propriétés générales de l'intégrale.

Théorème 10.10

Soit f et g deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tous $a, b \in I$, on a les propriétés suivantes :

1. **Linéarité de l'intégrale** : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$
2. **Relation de Chasles** : soit $c \in I$. On a :
$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$
3. **Positivité** (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors
$$\int_a^b f(t) dt \geq 0$$
4. **Croissance** (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : si $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors
$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

Démonstration. En passant par une primitive. Par exemple, pour Chasles, on introduit une primitive F de f sur I. Alors :
$$\int_a^c f(t) dt = F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a) = \int_b^c f(t) dt + \int_a^b f(t)$$
□

Remarque (Linéarité du crochet)**.** L'intégrale est donc linéaire, et il en va de même du “crochet” d'intégration :
$$[\lambda f(x) + \mu g(x)]_a^b = \lambda\, [f(x)]_a^b + \mu\, [g(x)]_a^b$$

3.3 Intégration par parties

Théorème 10.11 – IPP

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $a, b \in I$. Alors
$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Démonstration. Comme u et v sont dérivables, leur produit uv l'est aussi et on a
$$(uv)' = u'v + v'u$$
De plus, comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $u'v + v'u$ est continue sur $[a, b]$ par produit et somme de fonctions continues. On peut donc intégrer $u'v + v'u$ et donc $(uv)'$. (En outre, deux fonctions égales ont la même

intégrale sur $[a,b]$). Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_a^b (uv)' &= \int_a^b (u'v + v'u) \\ \Longrightarrow [uv]_a^b &= \int_a^b u'v + \int_a^b v'u \end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Dans le programme, il est explicitement mentionné que *pour appliquer l'IPP, on ne demande pas de rappeler les hypothèses que u et v soient de classe* $\mathscr{C}^1$. Mais il est toujours bon de le vérifier mentalement.

Remarque. L'IPP permet de remplacer une fonction par sa dérivée. L'IPP est particulièrement adaptée pour les fonctions "compliquées" dont la dérivée est plus simple, comme les fonctions ln, arccos, arcsin, arctan, etc.

Exemple 9. Calculer $\int_1^e \ln(x)dx$.

3.4 Changement de variables $u = \varphi(x)$ dans $\int_a^b f(x)dx$

Dans cette section, pour tous $a,b \in \mathbb{R}$ on définit la notation (non officielle) suivante :

$$I_{a,b} := \begin{cases} [a,b] & \text{si } a \leq b \\ [b,a] & \text{si } b \leq a \end{cases}$$

Autrement dit, $I_{a,b}$ désigne l'intervalle fermé de $\mathbb{R}$ ayant pour bornes a et b.

Théorème 10.12

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, et $\varphi : I_{a,b} \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \times \varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Alors $(F\circ\varphi)' = (f\circ\varphi)\times\varphi'$. (De plus, la dérivée de $F\circ\varphi$ est continue sur $I_{a,b}$ car $f\circ\varphi$ et φ' le sont). Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\varphi'(x)dx &= \int_a^b (F\circ\varphi)'(x)dx \\ &= [(F\circ\varphi)(x)]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du &= [F(u)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))\end{aligned}$$

On obtient donc l'égalité voulue. □

Le Théorème ci-dessus n'a en réalité que peu d'intérêt à être retenu, il est **primordial** de savoir l'appliquer en pratique. Dans cette section, on commence par le cas où l'on définit la "nouvelle" variable u en fonction de "l'ancienne" variable x qui existe déjà dans l'intégrale.

Méthode – Changement de variable $u = \varphi(x)$

On dispose d'une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Pour faire le changement de variable $u = \varphi(x)$:

1. On **écrit** $\begin{cases} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{cases}$.
   - Si φ est bijective, on peut éventuellement **renverser** la relation en $\begin{cases} x = \psi(u) \\ dx = \psi'(u)du \end{cases}$ (avec $\psi = \varphi^{-1}$)
2. On transforme le "dx" en "du", grâce aux relations ci-dessus.
3. On transforme tous les "x" restants de $f(x)$ en "u", grâce aux relations ci-dessus.
4. On change les bornes : $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b}$ devient $\displaystyle\int_{u=\varphi(a)}^{u=\varphi(b)}$

Exemple 10. Calculer $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2 dx$ avec le changement de variables $u = \ln x$ *(résolution avec un renversement)*

Remarque. Dans l'exemple ci-dessus, on a renversé les relations pour faire les transformations de l'intégrale. Ce n'est pas une obligation ! Le plus souvent, avec des réécritures astucieuses, on peut se passer de cette étape.

Exemple 11. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx$. *(résolution sans renversement)*

À ce stade, l'idée naturelle est de faire le changement de variable $\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx \end{cases}$ pour "simplifier" tous les e^x. Cependant, on ne trouve pas de terme "$e^x dx$" qui pourrait se transformer en "du". On pourrait croire qu'on est forcé de faire un renversement, mais on peut être plus malin en forçant l'apparition de "$e^x dx$" avec la technique du "$\frac{1}{1}$" !

Autrement dit, si on arrive à faire ces réécritures, cela revient à pouvoir réécrire l'intégrale sous la forme de gauche ci-dessous :

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \times \varphi'(x)dx \quad = \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du \qquad \begin{cases} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{cases}$$

Si aucun renversement n'est nécessaire, alors il n'est pas nécessaire que φ soit bijective : d'ailleurs la bijectivité de φ n'est pas une hypothèse du Théorème 10.12.

3.5 Changement de variables $x = \varphi(t)$ dans $\int_a^b f(x)dx$

Dans cette section, on étudie le cas où l'on définit "l'ancienne" variable x en fonction de la "nouvelle" variable t. Le principe est similaire, on écrit

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{cases}$$

puis on fait les substitutions de "dx" ainsi que du "x" dans "$f(x)$" à partir des relations ci-dessus.
Par contre, il faut être précautionneux dans la transformation des bornes. Tout d'abord, on supposera que les anciennes bornes a et b sont "dans le bon sens", i.e. que $a < b$. Ensuite, il faut trouver et choisir deux réels t_a et t_b qui vérifient :

$$\varphi(t_a) = a \qquad \varphi(t_b) = b \qquad \varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ entre } t_a \text{ et } t_b$$

Dans ce cas, les bornes passent de "$\int_{x=a}^{x=b}$" à "$\int_{t=t_a}^{t=t_b}$". Si on note I l'intervalle de bornes t_a et t_b, et que φ est bijective de I sur son image, on peut aussi renverser la relation $x = \varphi(t)$ en $t = \varphi^{-1}(x)$. Dans ce cas, $t_a = \varphi^{-1}(a)$ et $t_b = \varphi^{-1}(b)$.

Exemple 12. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ avec le changement de variable $x = \sin t$.

Remarque. Dans l'exemple ci-dessus, on aurait pu choisir d'autres valeurs pour t_a et t_b. On aurait pu prendre :

$$\begin{cases} t_a = \dfrac{\pi}{2} \\ t_b = \pi \end{cases} \qquad \text{on aurait alors obtenu} \qquad \mathcal{I} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2(t)dt$$

ce qui aurait mené au même résultat.

3.6 Résultats de parité et de périodicité

Théorème 10.13

Soit $a \geq 0$ et f une fonction continue.

- Si $f : \left[-a, a\right] \to \mathbb{R}$ est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- Si $f : \left[-a, a\right] \to \mathbb{R}$ est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique, alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{b}^{b+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$.

Démonstration. On ne fait la preuve que du résultat pour f impaire.

$\square$

4 Primitives et intégrales de fonctions complexes

4.1 Définition

Définition 10.14

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Si f est continue, alors $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ le sont aussi et on définit l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$$

En d'autres termes,

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$$

Ainsi, tout se passe comme si le nombre i est une constante.

Exemple 13. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} (x + ix^2)dx$.

Ceci permet de donner un sens à toutes les notions vues plus haut lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4.2 Le passage par les complexes

Méthode – Intégrales des fonctions $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Pour calculer $\displaystyle\int_a^b e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, on écrit

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{\alpha x} \cos(\beta x)dx &= \int_a^b e^{\alpha x} \mathrm{Re}\left(e^{i\beta x}\right) dx \\ &= \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{\alpha x + i\beta x} dx\right)\end{aligned}$$

et on connait une primitive de $e^{(\alpha + i\beta)x}$. Idem pour $\displaystyle\int_a^b e^{\alpha x} \sin(\beta x)dx$.

Exemple 14. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x} \sin(4x)dx$.

5 Intégrales de fonctions rationnelles

Dans cette section, on considère un polynôme de degré 2 $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On cherche à calculer

$$\int_A^B \frac{1}{ax^2+bx+c}dx \qquad \left(= \int_A^B \frac{1}{P}\right)$$

avec $A < B$ deux réels. On suppose que P ne s'annule pas sur $\left[A, B\right]$, donc la fonction $\frac{1}{P}$ sera continue sur $\left[A, B\right]$, de sorte que l'intégrale ci-dessus a un sens. Il y a en tout trois cas possibles, selon que P admette zéro, un ou deux racines dans $\mathbb{R}$.

Méthode – Intégrale de $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ (racine double)

1. Si P admet une racine double $r \in \mathbb{R}$, on a donc $P(x) = a(x-r)^2$. Alors, on peut trouver une primitive de $\frac{1}{P}$ directement :

$$\int_A^B \frac{1}{a(x-r)^2}dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 15. Calculer l'intégrale $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4x^2+4x+1}dx$.

Méthode – Intégrale de $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ (deux racines réelles)

2. Si P admet deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, on a donc $P(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$. Alors, on trouve des coefficients $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [A, B] \qquad \frac{1}{(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{c_1}{x-r_1} + \frac{c_2}{x-r_2}$$

et on intègre ensuite chaque terme directement puisque $\displaystyle\int_A^B \frac{c_i}{x-r_i} dx = \ldots\ldots\ldots$

Exemple 16. Calculer l'intégrale $\mathcal{I}_2 = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+x-2} dx$.

Méthode – Intégrale de $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ (pas de racine réelle)

3. Si P n'admet aucune racine réelle, on le met sous la forme canonique $P(x) = a\left((x+\beta)^2+\gamma^2\right)$ avec $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $\gamma \neq 0$. Ensuite, on fait une réécriture pour faire apparaitre du $\dfrac{1}{X^2+1}$ dans l'intégrale avec une expression X qui dépend de x :

Exemple 17. Calculer l'intégrale $\mathcal{I}_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx$.

6 Calcul de primitives par un calcul d'intégrale

Par le TFA, on sait que la fonction $\quad x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt \quad$ est (l'unique) primitive de f qui s'annule en a.

Notation. Il arrive qu'on note

$$\int^x f(t)dt \qquad \text{ou} \qquad \int^x f$$

pour désigner $F(x)$, avec F une primitive quelconque de f. Toutefois, cette expression n'est définie qu'à constante près, et donc on n'utilisera cette notation que lorsqu'on cherchera une primitive de f.

En quelque sorte, c'est comme si on ne précisait pas qui est le a qu'on choisit pendant le calcul de $\int_a^x f(t)dt$.

Exemple 18. On peut écrire

$$\int^x \cos(t)dt = \left[\sin t\right]^x = \sin x$$

pour signifier que $x \mapsto \sin x$ est une primitive de cos. Mais on pourrait aussi écrire $\int^x \cos(t)dt = \sin x + 3$ ...
Sont valides avec cette notation : la linéarité, l'IPP et bien sûr le passage au crochet lorsqu'on a trouvé une primitive.

Exemple 19. Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$.

7 Méthodes pour les exercices

Le calcul d'intégrales peut faire intervenir de nombreuses techniques différentes, qui peuvent être combinées.

- **La relation de Chasles** est utile pour traiter des fonctions dont l'expression nécessite de distinguer deux cas ou plus.
$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx$$
- **La parité ou la périodicité** mènent parfois à des raccourcis salvateurs.
$$\int_{-7\pi}^{7\pi} \arctan x\,dx = 0$$
- **Reconnaitre une primitive** nécessite de la pratique. Notamment, il faut pouvoir reconnaitre des fonctions de la forme $u'u^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) et les intégrer. On peut écrire une primitive "approchée" au brouillon (qui a la bonne tête à constante près) et se ramener à la forme exacte en tâtonnant.
$$\forall n \in [\![2,+\infty[\![\qquad \int_a^b \frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx = \dots$$
- **L'intégration par parties** est utile lorsqu'une fonction est "compliquée" mais que sa dérivée est simple. Si on ne dispose que d'une fonction, on peut considérer que la seconde est $x \mapsto 1$, cf Exemple 9.

  Parfois, il faut intégrer par parties plusieurs fois d'affilée. Cela permet de traiter des intégrales du type
$$\int_a^b x^n e^x\,dx \qquad \int_a^b x^n \cos x\,dx \qquad \int_a^b x^n \sin x \qquad \dots$$
- **Le changement de variables** est très efficace... à condition de faire la bonne transformation. Il existe différentes techniques selon la forme de l'intégrale à calculer.

Enfin, d'autres petites techniques permettent de simplifier des calculs. On peut mentionner les stratégies "$+1-1$" ou "$\frac{1}{1}$", l'utilisation de formules de trigonométrie, le passage aux complexes par les formules d'Euler...